Método de Gauss. Problemas resueltos.

¿Cómo debemos resolver un problema de sistema de ecuaciones?

En primer lugar, antes de comenzar a practicar este tipo de problemas debemos tener en cuenta una serie de consejos que nos serán útiles.

Para resolver un problema debemos:

- Antes de comenzar, realizar una lectura detenida del mismo. Familiarizarnos con el problema es clave antes de empezar.
- Una vez hemos entendido el contexto y el tipo de problema que se nos plantea, debemos realizar el planteamiento del mismo.
- Si es necesario, realizaremos un dibujo, una tabla, o un representación de lo expuesto. Una vez hecho, intentamos identificar la incógnita y los datos que aporta el problema.
- Para plantear las ecuaciones volveremos al problema y debemos "traducir" el mismo a una expresión algebraica.
- En este tipo de problemas con más de una incógnita debemos encontrar tantas ecuaciones como incógnitas se nos presenten. Es decir, si tenemos dos incógnitas debemos encontrar dos ecuaciones, si tenemos tres, tres ecuaciones.
- El siguiente paso es resolver el sistema de ecuaciones.
- Por último y muy importante, debemos interpretar la solución.

En este caso los resolveremos por el método de Gauss:

El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineal en otro escalonado.

Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{llll} x & +y & +3z & =-8 \\ & +y & +3z & =8 \\ & & +z & =2 \end{array}\right\}$$

El sistema transformado en matriz:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +3 & -8 \\ 0 & +1 & +3 & +8 \\ 0 & 0 & +1 & +2 \end{pmatrix}$$

Si te fijas, ya podemos despejar directamente una de las incógnitas. Por tanto, este tipo de sistemas es muy fácil de resolver obteniendo el valor de las incógnitas de abajo hacia arriba. De esta manera, podemos ir sustituyendo los valores obtenidos en las anteriores.

z=2

Sustituimos el valor de “z” en la segunda ecuación y obtenemos el valor de “y”:

y+3.(2)=8;

y=8-6=2;

Sustituimos el valor de “z” e “y” en la primera ecuación y obtenemos “x”:

y=2

x+(2)+3.(2)=-8;

x=-16

Si nuestro sistema no es un sistema escalonado, lo podemos resolver mediante **el método de Gauss.**

Para ello “hacemos cero”, es decir, sometemos a las ecuaciones a transformaciones elementales:

- Multiplicamos por un número distinto de cero.
- Sumar una ecuación a otra multiplicada por un número.

Para trabajar mejor utilizamos sólo los números (coeficientes y término independiente) y trabajamos con una estructura de matriz.

<u>Ejemplo:</u>

$$\left.\begin{array}{cccc} +x & +y & +z & = 2 \\ 3x & -2y & -z & = 4 \\ -2x & +y & +2z & = 2 \end{array}\right\}$$

Utilizamos los coeficientes y los términos independientes y realizamos una matriz:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +2 \\ +3 & -2 & -1 & +4 \\ -2 & +1 & +2 & +2 \end{pmatrix}$$

Necesitamos hacer ceros en los números destacados en la matriz anterior.

Primeras transformaciones, deseamos realizar los ceros de la primera columna:

Primer paso, transformar la segunda fila,

1. **Fila uno** multiplicada por -3

$$-3.(+1 \quad +1 \quad +1 \quad +2) = -3 \quad -3 \quad -3 \quad -6$$

2. **Le sumo la fila 2.**

$$\begin{array}{cccc} -3 & -3 & -3 & -6 \\ +3 & -2 & -1 & +4 \\ \hline 0 & -5 & -4 & -2 \end{array}$$

Segundo paso, transformar la tercera fila,

1. **Fila uno** multiplicada por +2.

$$+2.(+1 \quad +1 \quad +1 \quad +2) = +2 \quad +2 \quad +2 \quad +4$$

2. **Le sumo la fila 3.**

$$\begin{array}{cccc} +2 & +2 & +2 & +4 \\ -2 & +1 & +2 & +2 \\ \hline 0 & +3 & +4 & +6 \end{array}$$

Así, la matriz resultante sería:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & +3 & +4 & +6 \end{pmatrix}$$

Segundas transformaciones, deseamos realizar el ceros de la segunda columna:

Para ello, <u>sólo utilizamos la segunda y tercera fila</u>:

1. **Fila uno** se mantiene.
2. **Fila dos** se multiplica por 3.

$$+3.(0 \quad -5 \quad -4 \quad -2) = +0 \quad -15 \quad -12 \quad -6$$

3. Fila tres se multiplica por 5.

$$+5.(0 \quad +3 \quad +4 \quad +6) = 0 \quad +15 \quad +20 \quad +30$$

4. Sumo la fila dos y tres transformadas.

$$\begin{array}{cccc} 0 & -15 & -12 & -6 \\ 0 & +15 & +20 & +30 \\ \hline 0 & 0 & +8 & +24 \end{array}$$

De esta manera, el sistema resulta:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & +8 & +24 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 2 \\ & -5y & -4z & = -2 \\ & & +8z & = +24 \end{array}\right\}$$

Siendo la solución:

z=24/8=+3

Sustituimos el valor de “z” en la segunda ecuación y obtenemos el valor de “y”:

-5y-4.3=-2

-5y=-2+12

y=10/-5=-2

y=-2

Sustituimos el valor de “z” e “y” en la primera ecuación y obtenemos “x”:

x+(-2)+3=+2

x=+2-3+2

x=+1

Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas da de ser igual a 264000 euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras sea la décima parte del dinero en euros.
Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

Planteamiento:

Cantidad de euros: x

Cantidad de dólares: y

Cantidad de libras esterlinas: z

	EUROS
LIBRAS	1,5
DÓLARES	1,1

Sistema de ecuaciones:

Primera ecuación:

"El valor total entre las tres monedas da de ser igual a 264000 euros"

$$x+1,1y+1,5z=264000$$

$$10.(x+1,1y+1,5z=264000)= 10x+11y+15z=2640000$$

$$10x+11y+15z=2640000$$

Segunda ecuación:

"el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares"

$$x= 2,2y$$

$$x-2,2y=0$$

$$10.(x-2,2y=0) = 10x-22y=0$$

$$10x-22y=0$$

Tercera ecuación:

“el valor del dinero en libras sea la décima parte del dinero en euros”

x/10=1,5z

x=15z

x-15z=0

$$\left.\begin{array}{llll} \mathbf{10x} & \mathbf{+11y} & \mathbf{+15z} & \mathbf{= 2640000} \\ \mathbf{10x} & \mathbf{-22y} & & \mathbf{= 0} \\ \mathbf{x} & & \mathbf{-15z} & \mathbf{= 0} \end{array}\right\}$$

Resolución por el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{llll} \mathbf{10x} & \mathbf{+11y} & \mathbf{+15z} & \mathbf{= 2640000} \\ \mathbf{10x} & \mathbf{-22y} & & \mathbf{= 0} \\ \mathbf{x} & & \mathbf{-15z} & \mathbf{= 0} \end{array}\right\}$$

Utilizamos los coeficientes y los términos independientes y realizamos una matriz:

$$\begin{pmatrix} +10 & +11 & +15 & +2640000 \\ +10 & -22 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

Necesitamos hacer ceros en los números destacados en la matriz anterior.

Primeras transformaciones, deseamos realizar los ceros de la primera columna:

Primer paso, transformar la segunda fila,

1. **Fila uno** se mantiene
2. **Transformo la Fila2: le sumo la fila 1 y le resto la fila 2.**

$$\begin{array}{cccc} +10 & +11 & +15 & +2640000 \\ -10 & +22 & 0 & 0 \\ \hline 0 & +33 & +15 & +2640000 \end{array}$$

Segundo paso, transformar la tercera fila,

3. **Fila uno** se mantiene.
4. **Transformo la Fila 3: Le sumo ala fila 1 -10 veces la fila 3.**

$$-10.(+1 \quad 0 \quad -15 \quad 0) = -10 \quad 0 \quad +150 \quad 0$$

$$\begin{array}{cccc} +10 & +11 & +15 & +2640000 \\ -10 & 0 & +150 & +0 \\ \hline 0 & +11 & +165 & +2640000 \end{array}$$

Así, la matriz resultante sería:

$$\begin{pmatrix} +10 & +11 & +15 & +2640000 \\ 0 & +33 & +15 & +2640000 \\ 0 & +11 & +165 & +2640000 \end{pmatrix}$$

Segundas transformaciones, deseamos realizar el ceros de la segunda columna:

Para ello, sólo utilizamos la segunda y tercera fila:

1. **Fila uno** se mantiene.
2. **Fila dos** se mantiene.
3. **Transformo la Fila 3**: fila tres se multiplica por -3 y la sumo la fila2.

$$-3.(0 \quad +11 \quad +165 \quad +2640000) = +0 \quad -33 \quad -495 \quad -7920000$$

Sumo la fila dos y tres transformadas.

$$\begin{array}{cccc} 0 & +33 & +15 & +2640000 \\ 0 & -33 & -495 & -7920000 \\ \hline 0 & 0 & -480 & -5280000 \end{array}$$

De esta manera, el sistema resulta:

$$\begin{pmatrix} +10 & +11 & +15 & +2640000 \\ 0 & +33 & +15 & +2640000 \\ 0 & 0 & -480 & -5280000 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{llll} 10x & +11y & +15z & = +2640000 \\ & +33y & +15z & = +2640000 \\ & & -480z & = -5280000 \end{array}\right\}$$

Siendo la solución:

$z=-5280000/-480=11000$

Sustituimos el valor de “z” en la segunda ecuación y obtenemos el valor de “y”:

$+33y+15.11000=+2640000$

$+33y=+2640000-165000$

$y=2475000/33=75000$

$y=+75000$

Sustituimos el valor de “z” e “y” en la primera ecuación y obtenemos “x”:

$10x+11.(75000)+15.(11000)=+2640000$

$x=+1650000/10=165000$

$x=165000$

Solución:

Cantidad de euros: x= 165000 euros

Cantidad de dólares: y = 75000 dólares

Cantidad de libras esterlinas: z= 11000 libras

Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto A, un 6% en el producto B y un 5 % en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6 % sobre el precio inicial de C.

Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta de un producto a, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto al precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco en la segunda oferta el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros.

Planteamiento:

	A	B	C
Sin oferta	x	y	z
1 Oferta	0,96x	0,94y	0,95z
2 Oferta	0,92x	0,90y	0,94z

Sistema de ecuaciones:

Primera ecuación:

"un producto a, dos B y tres C, se ahorra 16 euros"

0,96x+2.(0,94y) +3.(0,94)z= x+2y+3z-16

0,96x-x+1,88y-2y+2,85z-3z=-16

-0,04x-0,12y-0,15z=-16

-100.(-0,04x-0,12y-0,15z=-16)

4x+12y+15z=1600

Segunda ecuación:

"tres productos A, uno B y cinco en la segunda oferta el ahorro es de 29 euros"

3.(092x)+1.(0,90y)+5.(0,94z)= 3x+y+5z-29

2,76x-3x+0,90y-y+4,7z-5z=-29

-0,24x-0,1y-0,3z=-29

-50.(-0,24x-0,1y-0,3z=-29)

12x+5y+15z=1450

Tercera ecuación:

"un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros"

x +y +z =135

$$\left.\begin{array}{llll}\mathbf{4x} & \mathbf{+12y} & \mathbf{+15z} & \mathbf{=1600}\\ \mathbf{12x} & \mathbf{+5y} & \mathbf{+15z} & \mathbf{=1450}\\ \mathbf{x} & \mathbf{+y} & \mathbf{+z} & \mathbf{=135}\end{array}\right\}$$

Resolución por el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{llll}\mathbf{4x} & \mathbf{+12y} & \mathbf{+15z} & \mathbf{=1600}\\ \mathbf{12x} & \mathbf{+5y} & \mathbf{+15z} & \mathbf{=1450}\\ \mathbf{x} & \mathbf{+y} & \mathbf{+z} & \mathbf{=135}\end{array}\right\}$$

Utilizamos los coeficientes y los términos independientes y realizamos una matriz:

$$\begin{pmatrix}+4 & +12 & +15 & +1600\\ +12 & +5 & +15 & 1450\\ +1 & +1 & +1 & 135\end{pmatrix}$$

Necesitamos hacer ceros en los números destacados en la matriz anterior.

Primeras transformaciones, deseamos realizar los ceros de la primera columna:

Primer paso, transformar la segunda fila,

1. **Fila uno** se mantiene.
2. **Transformo la Fila 2 : multiplico la fila 1 por 3 y le resto la fila 2.**

3.$(+4 \quad +12 \quad +15 \quad +1600)$= $+12 \quad +36 \quad +45 \quad +4800$

$$\begin{array}{rrrr} +12 & +36 & +45 & +4800 \\ -12 & -5 & -15 & -1450 \\ \hline 0 & +31 & +30 & +3350 \end{array}$$

Segundo paso, transformar la tercera fila,

3. **Fila uno** se mantiene.
4. **Transformo la Fila3: a la fila1 le sumo -4 veces la fila 3.**

-4.$(+1 \quad +1 \quad +1 \quad 135)$= $-4 \quad -4 \quad -4 \quad -540$

$$\begin{array}{rrrr} +4 & +12 & +15 & +1600 \\ -4 & -4 & -4 & -540 \\ \hline 0 & +8 & +11 & +1060 \end{array}$$

Así, la matriz resultante sería:

$$\begin{pmatrix} +4 & +12 & +15 & +1600 \\ +0 & +31 & +30 & +3350 \\ +0 & +8 & +11 & +1060 \end{pmatrix}$$

Segundas transformaciones, deseamos realizar el ceros de la segunda columna:

Para ello, sólo utilizamos la segunda y tercera fila:

1. **Fila uno** se mantiene.
2. **Fila dos** se mantiene.
3. **Transformo la Fila 3:** se multiplica por 8 la fila 2 y se combina restándole 31 veces la fila 3.

-8. $(0 \quad +31 \quad +30 \quad +3350)$= $+0 \quad -248 \quad -240 \quad -26800$

+31.$(0 \quad +8 \quad +11 \quad +1060)$= $+0 \quad +248 \quad +341 \quad +32860$

Sumo la fila dos y tres transformadas.

$$\begin{array}{rrrr} 0 & -248 & -240 & -26800 \\ 0 & +248 & +341 & +32860 \\ \hline 0 & 0 & +101 & +6060 \end{array}$$

De esta manera, el sistema resulta:

$$\begin{pmatrix} +4 & +12 & +15 & +1600 \\ +0 & +31 & +30 & +3350 \\ +0 & +0 & +101 & +6060 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{llll} 4x & +12y & +15z & = +1600 \\ & +31y & +30z & = +3350 \\ & & +101z & = +6060 \end{array}\right\}$$

Siendo la solución:

z=+6060/+101=60

Sustituimos el valor de “z” en la segunda ecuación y obtenemos el valor de “y”:

+31y+30.60=+3350

+31y=+3350-1800

y=1550/31=50

y=+50

Sustituimos el valor de “z” e “y” en la primera ecuación y obtenemos “x”:

4x+12.(50)+60.(60)=+1600

x=100/4=25

x=25

Solución:

	A	B	C
Sin oferta	25 euros	50 euros	60 euros
1 Oferta	24 euros	47 euros	57 euros
2 Oferta	23 euros	45 euros	56,4 euros

“un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros”

25+50+60=135

Un hotel adquirió un total de 200 unidades entre almohadas, mantas y edredones, gastando un total de 7500 euros. El precio de una almohada es de 16 euros, el de una manta es de 50 euros y el de un edredón es de 80 euros. Además, el número de almohadas compradas es igual al número de mantas más el número de edredones. ¿Cuántas almohadas, mantas y edredones ha comprado el hotel?

Planteamiento:

Cantidad de almohadas: x

Cantidad de mantas: y

Cantidad de libras edredones: z

	PRECIO/UNIDAD
Almohadas	16euros
Mantas	50euros
Edredones	80euros

Sistema de ecuaciones:

Primera ecuación:

"un total de 200 unidades entre almohadas, mantas y edredones"

$x + y + z = 200$

Segunda ecuación:

"gastando un total de 7500 euros"

$16x+50y+80z=7500$

$16x+50y+80z=7500$

Tercera ecuación:

"el número de almohadas compradas es igual al número de mantas más el número de edredones" x = y+z

x-y-z=0

$$\left.\begin{array}{cccc} \mathbf{x} & +\mathbf{y} & +\mathbf{z} & = \mathbf{200} \\ \mathbf{16x} & +\mathbf{50y} & +\mathbf{80}z & = \mathbf{7500} \\ \mathbf{x} & -y & -\mathbf{z} & = \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

Resolución por el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{cccc} \mathbf{x} & +\mathbf{y} & +\mathbf{z} & = \mathbf{200} \\ \mathbf{16x} & +\mathbf{50y} & +\mathbf{80}z & = \mathbf{7500} \\ \mathbf{x} & -y & -\mathbf{z} & = \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

Utilizamos los coeficientes y los términos independientes y realizamos una matriz:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +200 \\ +16 & +50 & +80 & 7500 \\ +1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Necesitamos hacer ceros en los números destacados en la matriz anterior.

Primeras transformaciones, deseamos realizar los ceros de la primera columna:

Primer paso, transformar la segunda fila,

1. **Fila uno** se mantiene
2. **Transformo la Fila 2: multiplico la primera por 16 y le resto la fila 2.**

$$\begin{array}{cccc} +16 & +16 & +16 & +3200 \\ -16 & -50 & -80 & -7500 \\ \hline 0 & -34 & -64 & -4300 \end{array}$$

Segundo paso, transformar la tercera fila,

3. **Fila uno** se mantiene.
4. **Transformo la Fila 3: le resto a la fila 1 la fila 3**

$$\begin{array}{cccc} +1 & +1 & +1 & +200 \\ -1 & +1 & +1 & +0 \\ \hline 0 & +2 & +2 & +200 \end{array}$$

Así, la matriz resultante sería:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +200 \\ 0 & -34 & -64 & -4300 \\ 0 & +2 & +2 & +200 \end{pmatrix}$$

Segundas transformaciones, deseamos realizar el ceros de la segunda columna:

Para ello, sólo utilizamos la segunda y tercera fila:

1. **Fila uno** se mantiene.
2. **Fila dos** se mantiene.
3. **Transformo la Fila 3**: multiplico la fila 3 por 17 y le sumo la fila 2.

17.$(0 \quad +2 \quad +2 \quad +200)$= $+0 \quad +34 \quad +34 \quad +3400$

Sumo la fila dos y tres transformadas.

$$\begin{array}{cccc} 0 & +34 & +34 & +3400 \\ 0 & -34 & -64 & -4300 \\ \hline 0 & 0 & -30 & -900 \end{array}$$

De esta manera, el sistema resulta:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +200 \\ 0 & -34 & -64 & -4300 \\ 0 & +0 & -30 & -900 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{llll} x & +y & +z & = +200 \\ & -34y & -64z & = -4300 \\ & & -30z & = -900 \end{array}\right\}$$

Siendo la solución:

z=-900/-30=30

Sustituimos el valor de “z” en la segunda ecuación y obtenemos el valor de “y”:

-34y-64.30=-4300

-34y=-4300+1920

y=-2380/-34=70

y=+70

Sustituimos el valor de "z" e "y" en la primera ecuación y obtenemos "x":

x+70+30=+200

x=+200-70-30

x=100

Solución:

Cantidad de almohadas: x=100

Cantidad de mantas: y=70

Cantidad de libras edredones: z=30

	PRECIO/UNIDAD
Almohadas	16euros
Mantas	50euros
Edredones	80euros

"gastando un total de 7500 euros"

16x+50y+80z=7500

16.(100)+50.(70)+80. (30) = 7500

Si tienes cualquier duda y quieres ponerte en contacto conmigo, puedes hacerlo escribiéndome a yosoytuprofe.miguel@gmail.com, o bien a través de mis perfiles en redes sociales (Facebook,Twitter,Instagram o Youtube).

Nos vemos en la siguiente clase.